

Herhalingstentamen W5, 27 juni 2001, 9.00-12.00 WSN 31

- (1) U is een open, niet lege, deelverzameling van het complexe vlak \mathbf{C} .
- (a) Geef de definities van “ U is (weg) samenhangend” ((pathwise) connected) en van “ U is enkelvoudig samenhangend” (simply connected).
- (b) Geef een voorbeeld van een open U , die wel samenhangend is maar niet enkelvoudig samenhangend.
- (c) Geef de definitie van “compacte deelverzameling” van \mathbf{C} .
- (2) U is een open deelverzameling van \mathbf{C} en $f : U \rightarrow \mathbf{C}$ is een functie.
- (a) Wanneer voldoet f aan de Cauchy-Riemann vergelijkingen?
- (b) Voldoet de functie $f(x + iy) = x^2 + y^2$ aan de Cauchy-Riemann vergelijkingen?
- (3) Wat is de convergentiestraal r van een machtreeks $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$? Bereken de convergentiestraal van de machtreeks $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^3}{(3n)!} z^n$.
- (4) Laat $U := \{z \in \mathbf{C} \mid |z - 1| < 1\}$. Bewijs dat er een unieke holomorfe functie $f : U \rightarrow \mathbf{C}$ bestaat met $f^3 = z$ en $f(1) = 1$. Bereken de eerste drie termen van de machtreeksontwikkeling van f in het punt 1.
- (5) Laten $a_1, \dots, a_n \in \mathbf{C}$ punten op de éénheidscirkel zijn (d.w.z. $|a_i| = 1$). Bewijs dat er een z op de éénheidscirkel ligt zodat het produkt van de afstanden van z tot a_1, \dots, a_n op zijn minst 1 is. Aanwijzing: Gebruik het maximum principe voor de functie $\prod_{i=1}^n (z - a_i)$.
- (6) Geef één van de twee formules die de Gamma functie definiëren.
- (7) Bereken de gebroken lineaire transformatie (fractional linear transformation) F die voldoet aan $F(0) = \infty$, $F(1) = 1$, $F(\infty) = 2$.
- (8) Bereken de integraal $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^6 + 1} dx$.
- (9) C is de cirkel met middelpunt 0, straal 3,2 en voorzien van orientatie van de klok. Bereken $\int_C \frac{1}{e^{2\pi iz} - 1} dz$.
- (10) Bewijs dat $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + a^2} dx = \pi e^{-a}$. Hint: Voor $x \in \mathbf{R}$ is $x \sin x$ is het imaginaire deel van $x e^{ix}$.